Epreuve de mathématiques 8
2022-2023

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé
Durée : 4h

Encadrer les résultats et numéroter les copies

Problème 1 - Applications linéaires

Soit E un espace vectoriel. On s'intéresse dans ce problème aux applications linéaires vérifiant l'équation
$$f^2 = 2f. \qquad (\bigstar)$$

Partie 1 : Un exemple dans $\mathbb{R}^3$

On considère dans cette partie l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} & \mapsto & \begin{bmatrix} x-y \\ -x+y \\ 2x+2y+2z \end{bmatrix} \end{array}$$

On pose $F = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y=0 \}$.

1. Montrer que F est un espace vectoriel, déterminer une base de F et préciser sa dimension.
2. Montrer que f est linéaire.
3. Déterminer le noyau de f.
4. L'application f est-elle un automorphisme ?
5. Déterminer la dimension de $\mathrm{Im}\,(f)$.
6. Déterminer une base de $\mathrm{Im}\,(f)$.
7. Montrer que $\mathrm{Im}\,(f) = F$.
8. Montrer que f vérifie $(\bigstar)$.
9. Préciser une expression de f^n en fonction de f pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie 2 : Etude générale

On suppose à nouveau E quelconque.

10. Montrer qu'il existe un unique automorphisme vérifiant $(\bigstar)$ que l'on précisera.
11. Déterminer tous les projecteurs de E vérifiant $(\bigstar)$.

On fixe f un endomorphisme de E vérifiant $(\bigstar)$.

12. Montrer que $\mathrm{Im}\,(f - 2\mathrm{Id}_E) \subseteq \mathrm{Ker}\,(f)$.
13. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(f - 2\mathrm{Id}_E) \subseteq \mathrm{Im}\,(f)$.
14. On suppose dans cette question uniquement que E est de dimension finie. Montrer que $\mathrm{Im}\,(f - 2\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}\,(f)$.
15. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ sont en somme directe.
16. On suppose dans cette question uniquement que E est de dimension finie. Que peut-on déduire de la question précédente ?
17. Soient $(x_1, x_2) \in \mathrm{Ker}\,(f) \times \mathrm{Im}\,(f)$. Posons $x = x_1 + x_2$. Montrer que $x_2 = \frac{1}{2} f(x)$ et en déduire x_1 en fonction de x.
18. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ sont supplémentaires.

Soit $g \in \mathscr{L}(E)$.

19. On suppose que $f \circ g + g \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
    (a) Montrer que $f \circ g \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
    (b) En déduire que $f \circ g = g \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
20. On suppose que g vérifie ($\bigstar$). Montrer que $f + g$ est solution de ($\bigstar$) si et seulement si $f \circ g = g \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Partie 3 : En dimension infinie

On considère $E = \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $e_k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{2kx} \end{array}$ et on définit φ_k pour tout $f \in E$ par

$$\varphi_k(f) = \frac{f'(0)}{k} e_k.$$

21. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, φ_k est un endomorphisme de E.
22. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, φ_k vérifie ($\bigstar$).
23. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $F_k = \mathrm{Vect}(e_k)$ et $G = \{ f \in E \mid f'(0) = 0 \}$ sont supplémentaires.

Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On pose $E_n = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$, $G_n = \{ f \in E_n \mid f'(0) = 0 \}$ et ψ la restriction de φ_1 à E_n. On admet que $\psi \in \mathscr{L}(E_n)$.

24. Montrer que $\mathscr{C}_n = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E_n.
25. Montrer que $\mathscr{B}_n = \left(e_1 - \frac{e_2}{2}, e_1 - \frac{e_3}{3}, \dots, e_1 - \frac{e_n}{n}\right)$ est une base de G_n.
26. Montrer que $F_1 \oplus G_n = E_n$ et en déduire $\mathscr{A}_n$ une base de E_n telle que $\forall u \in \mathscr{A}_n$, $(u, \psi(u))$ est liée.

Problème 2 - Probabilités

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On possède deux urnes : l'urne A et l'urne B ainsi que $2n$ boules : n rouges et n vertes.

Partie 1 : Dénombrement

On choisit n boules que l'on met dans l'urne A et les n autres boules restantes vont dans l'urne B.

1. On suppose dans cette question que les boules de même couleur sont indiscernables. Un remplissage est alors uniquement caractérisé par le nombre de boules de chaque couleur. Combien y a t-il de remplissages distincts de l'urne A ?

On suppose dans la suite toutes les boules discernables, les vertes étant numérotées de 1 à n et de même pour les rouges.

2. Déterminer le nombre de remplissages possibles de l'urne A.
3. Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer le nombre de remplissages de l'urne A avec exactement k boules vertes.
4. En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ (appelée formule de Vandermonde).
5. Déterminer le nombre de remplissages de l'urne A avec au moins une boule de chaque couleur.
6. Déterminer le nombre de remplissages de l'urne A avec exactement une seule boule numérotée 1.

On considère pour toute la suite, $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini sur lequel toutes les variables aléatoires de ce problème seront définies.

On suppose à nouveau les boules de même couleur indiscernables. On remplit désormais les deux urnes de la façon suivante. On lance une pièce équilibrée à n reprises et on suppose les lancers indépendants. On note N le nombre de piles obtenus. On remplit alors l'urne A de N vertes et de $n - N$ rouges. Toutes les boules restantes vont dans l'urne B.

Une fois les urnes remplies, on procède de la façon suivante. A chaque étape, on pioche une boule dans chaque urne et on les échange. Ainsi chaque urne possède toujours à chaque étapes n boules. On pose $X_0 = N$ et on note pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, X_k le nombre de boules vertes présente dans l'urne A à l'issue du/juste après le tirage k.

Partie 2 : Lois initiales

On note Y la variable aléatoire valant 1 si l'on a pioché une boule verte au premier tirage dans l'urne A et 0 sinon. Soit $p \in [\![0; n]\!]$.

7. Quelle est la loi de N ? Préciser $\mathbb{P}(N = 1)$.
8. Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que $(X_k = p)$ est réalisé. Préciser alors la composition de l'urne A et de l'urne B à l'étape k.
9. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule verte dans l'urne A au tirage 1 sachant que $N = p$?
10. Justifier que $\mathbb{P}(Y = 1) = \dfrac{1}{2^n} \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \frac{p}{n}$.
11. En déduire que $Y \sim \mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)$. Pouvait-on intuiter ce résultat ?

12. On suppose dans cette question uniquement que n est pair. Préciser suivant la valeur de p si les évènements $(Y = 1)$ et $(N = p)$ sont indépendants ou non.
13. Calculer la probabilité d'avoir $N = n$ sachant que l'on a obtenu une boule verte dans l'urne A au tirage 1.

Partie 3 : Le cas $n = 2$

On suppose dans cette partie que $n = 2$.
On pose pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = \mathbb{P}(X_k = 0)$, $b_k = \mathbb{P}(X_k = 1)$ et $c_k = \mathbb{P}(X_k = 2)$.

14. Soit $k \in \mathbb{N}$. Que vaut $a_k + b_k + c_k$?
15. Préciser a_0, b_0, c_0.
16. Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $(i, j) \in [\![0; 2]\!]$, préciser en justifiant $\mathbb{P}(X_{k+1} = j \mid X_k = i)$.
17. Déduire de la question précédente que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{k+1} = \frac{b_k}{4} \\ b_{k+1} = a_k + \frac{b_k}{2} + c_k \\ c_{k+1} = \frac{b_k}{4} \end{cases} .$$

18. *Méthode 1.*
    (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $b_{k+2} = \frac{b_{k+1}+b_k}{2}$.
    (b) En déduire pour tout $k \in \mathbb{N}$, a_k, b_k et c_k.
19. *Méthode 2.*
    (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $b_{k+1} = 1 - \frac{b_k}{2}$.
    (b) En déduire pour tout $k \in \mathbb{N}$, a_k, b_k et c_k.
20. En déduire les limites des suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Partie 4 : Un petit pois dans un champ de betteraves

On reprend $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque. Soit $k \in \mathbb{N}$. On note U_k l'évènement : « l'urne A n'a eu qu'une seule boule verte du début jusqu'à l'étape k (incluse) ».

21. Ecrire U_k à l'aide de X_0, X_1, X_2, …, X_k.
22. Soit $i \in \mathbb{N}^*$. On suppose U_i réalisé. On effectue le tirage $i + 1$ dans chaque urne.
    (a) Quelle est α la probabilité d'obtenir une verte dans l'urne A et une boule verte dans l'urne B ?
    (b) Quelle est β la probabilité d'obtenir une rouge dans l'urne A et une boule rouge dans l'urne B ?
    (c) En déduire $\mathbb{P}(X_{i+1} = 1 \mid U_i)$.
23. Conclure en calculant $\mathbb{P}(U_k)$.